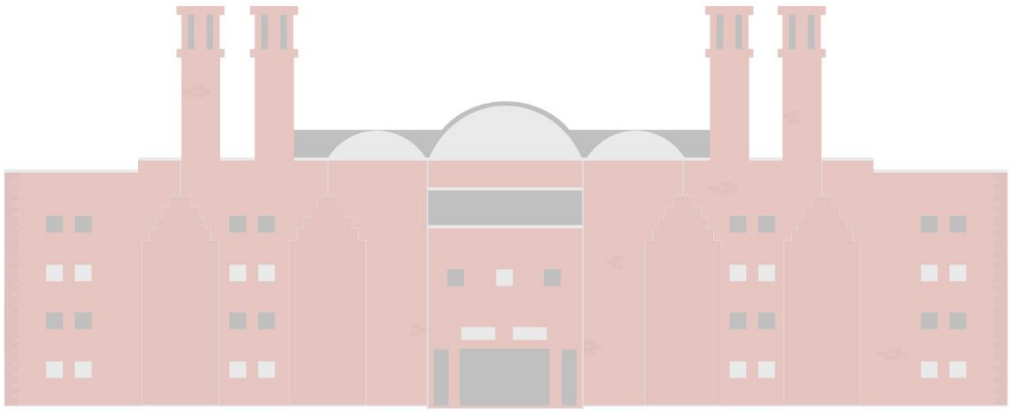
الحُقول الكَهرَطِيسيّة

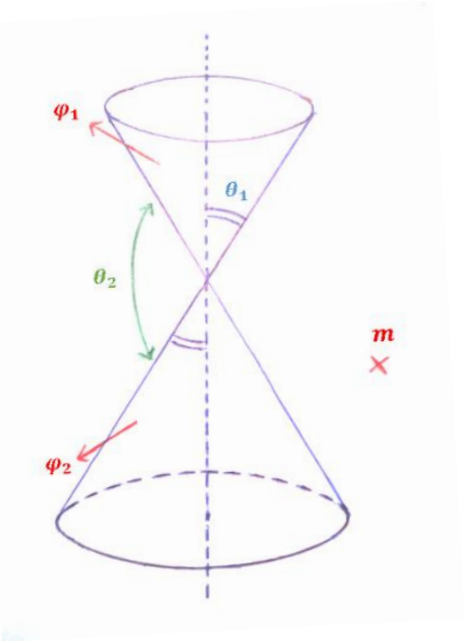
المحاضرة السادسة

8 صفحات



الدكتور: تيسير حجازي

التاريخ: 2014/11/6



• **مسألة :**

قمعين مخروطيين موجودين في الفراغ يتلاقيان معاً برأسيهما ولا يتقاطعان ، حيث الزاويتين :

$$\theta_2 = 135° \, , \theta_1 = 30°$$

كمون القمعين :

$$\varphi_2 = 1000 \; [v] \; , \qquad \varphi_1 = 0 \; [v]$$

و المطلوب :

تحديد الكمون الكهربائي الساكن و شدة الحقل في الفضاء بين القمعين و أيجاد من هذه المعادلة شدة الحقل في النقطة M و الكمون في النقطة M ذات الإحداثيات :

$$\theta = 120° \; , \qquad R = 2 \; [cm]$$

الحل :

نستخدم للحل جملة الإحداثيات الكروية حيث أن سطح الأقماع يمثل في هذه الجملة بشكل بسيط.

في الفضاء لا توجد شحنات حجمية بين القمعين لذلك توصف هذه المعادلة بمعادلة لابلاس :

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

و في جملة الإحداثيات الكروية :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

بسبب التناظر فالكمون φ يتعلق بِ θ فقط و لا يتعلق بـِ R و لا بـِ α لذلك معادلة لابلاس تصبح على الشكل:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\varphi}{d\theta} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \; \varphi = c_1 \ln \tan \frac{\theta}{2} + c_2$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

لإيجاد ثوابت التكامل c_1 , c_2 عند: $\theta = 30° , \varphi = 0 , \theta = 135° , \varphi = 1000$

$$\Rightarrow \quad 0 = c_1 \ln \tan(15) + c_2$$
$$1000 = c_1 \ln \tan(67.5) + c_2$$

$$\Rightarrow c_1 = 454.9 \ [v]$$
$$c_2 = 599.1 \ [v]$$

و تكون النقطة M :

$$\varphi_M = 454.9 * \ln \tan(60) + 599.1 = 849 \ [v]$$

و تملك شدة الحقل مركبة فقط بالنسبة لِ θ :

$$E_\theta = -\frac{d\varphi}{Rd\theta} = -\frac{c_1}{R \sin\theta} , E_{\theta_M} = -\frac{454.9}{0.02 \sin 120} = -26.3 \ kv/m$$

- **مسألة :**

إذا علم أن كمون الكهربائي في حقل كهرساكن يعطى بالعلاقة : $\varphi = \frac{K \cos\alpha}{R}$ في جملة الإحداثيات كروية .

المطلوب : إيجاد العلاقة المعبرة عن توزع الشحنة ρ المولدة للحقل .

الـــحـــل : تحل المسألة وفق معادلة بواسون : $\nabla^2 \varphi = \frac{-\rho}{\varepsilon}$

وبما أن الحقل يتعلق ب R و α يكون وبحسب جملة الإحداثيات الكروية :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)\right) + \cdots = \frac{-\rho}{\varepsilon}$$

من الفرض : $\varphi = \frac{K\cos\alpha}{R}$ ... (1)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial R} = -\frac{K\cos\alpha}{R} \Longleftarrow \mathrm{R}^2\frac{\partial\varphi}{\partial R} = -k\cos\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) = 0 \Longleftarrow \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -\frac{K\sin\alpha}{R}$$

$$\Longleftarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = -\frac{K\cos\alpha}{R}$$

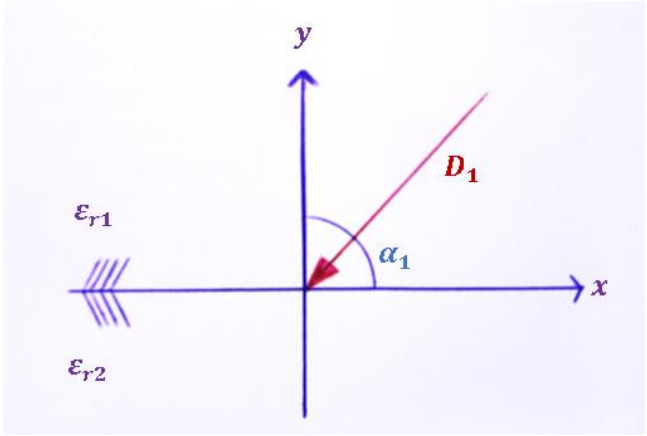
بالتعويض في العلاقة (1) نحصل على : $\rho = \frac{k\,\varepsilon\cos\alpha}{R^3\sin^2\theta}$

- **تمارين وظيفة :**

1 ـ أوجد نصف قطر كرة عازلة يمكن أن تتحمل 10^6 فولط قبل أن تنهار عازلية الهواء .. مع العلم أن توتر انهيار الهواء $30\ \mathrm{kv/cm}$ الجواب (1/3m)

2 ـ إذا كان شعاع التحريض الكهربائي في حقل كهرساكن منتظم في الهواء يساوي

$\mathrm{D1} = 1.77\mathrm{x}10-7\mathrm{c/m}^2$ و شدة الحقل الكهرساكن في العازل بسماحية العزل ε_2 معلومة وتساوي $E2 = 8x10^3\ v/m$.



المطلوب :

تحديد سماحية العزل النسبية للوسط العازل الثاني ε_{r2} إذا علم أن زاوية الورود $\alpha = 20^\circ$

3 ـ كرة ناقلة غير مشحونة نصف قطرها R_o موجودة في حقل منتظم

$$\varphi = E_o(R - \frac{R_o^3}{R^2})\cos\theta$$

والمطلوب :

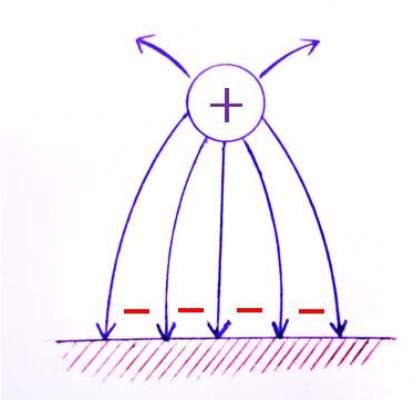
1 ـ هل يحقق هذا الحقل معادلة لابلاس ؟

2 ـ تحديد كثافة الشحنة السطحية .

طرق الحل :

1 ـ الطريقة التحليلية : أي تعتمد على حل المعادلات بالنسبة للحقل بشكل مباشر باستخدام بواسون / لابلاس / غاوس .

2 ـ طريقة الصور الكهربائية :



تستخدم هذه الطريقة في الحقول الكهربائية الساكنة والمغناطيسية خصوصاً و التي تمرّ بسطح ناقل ذو شكل منتظم أو التي تحتوي على شكل هندسي منتظم والتي تحوي على سطح فاصل بين عازلين , غالباً ما تستخدم هذه الطريقة وتسمى أحياناً طريقة خيال المرآة .

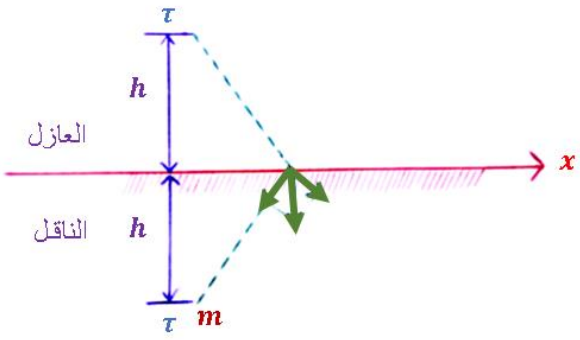
إنّ هذه الطريقة صناعية, و للحساب ندخل فيها شحنات وهمية إضافية إضافة للشحنات المعطاة ونختار قيم ومكان الشحنات بحيث تحقق الشروط الحدية للحقل .

فرضاً إذا كان لدينا شرط حدي واحد ندخل شحنة وهمية واحدة وإذا كان لدينا شرطان حديان ندخل شحنتين وهميتين و هكذا ..

ولو كان الحد بين الوسطين مستوياً فسوف توضع الشحنات الوهمية في المكان الذي توجد فيه صورة المرآة للشحنات المعطاة (في المعنى الهندسي) وتعتمد هذه الطريقة كأساس على فرضية الحل الوحيد) .

1 حقل محور مشحون موضوع قرب سطح ناقل :

نفترض أن المحور المشحون τ موجود في الوسط العازل وموجود بشكل موازٍ لسطح ناقل (يمكن أن يكون حائط معدني أو الأرض مثلاً) .



والمطلوب : تحديد طبيعة الحقل في نصف المستوي العلوي العازل .

تظهر شحنات ، و تتغير كثافتها مع تغير الإحداثي x ويولّد الحقل ليس فقط بسبب المحور المشحون ، ولكن أيضاً من الشحنات الموجودة على سطح الجسم الناقل .

بسبب التحريض الكهرساكن بغض النظر إذا كان توزع الشحنات على سطح الجسم الناقل غير معروف , و يمكن حل هذه المسألة باستخدام طريقة الصور (خيال المرآة) حيث نضع للشحنة الأصلية شحنة وهمية إضافية في m ذات إشارة معاكسة $-\tau$ للشحنة المعطاة $+\tau$ ، ولدينا المسافة h هي واحدة في الحالتين (من النقطة m للسطح الفاصل أو من الشحنة الحقيقية للسطح الفاصل) بهذا المعنى نكون قد حصلنا على خيال المرآة (الصورة) و في هذه المسألة $-\tau$ (الشحنة الوهمية) هي تساوي τ بالقيمة وتعاكسها بالإشارة .

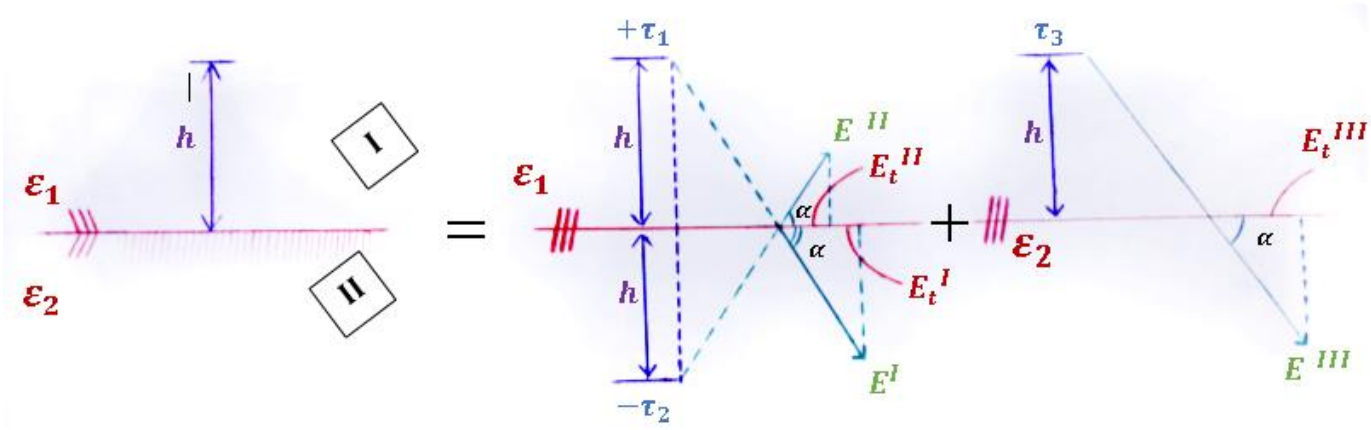
و لنتأكد أن شدة الحقل ناتجة عن $(\tau\ ,-\tau)$ في أي نقطة من الحد الفاصل هناك فقط مركبة عمودية على الحد و لا توجد مركبة مماسية.
(المركبات المماسية لكلا الشحنتين تملك اتجاهات متعاكسة و مجموعها يساوي الصفر في أي نقطة)
و بالتالي إنّ أي كمون بسبب أي محور من المحورين يحقق المعادلة التالية:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{r} + c$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

و يحقق أيضاً معادلة لابلاس في جملة الإحداثيات الأسطوانية .
و بما أنّ الكمون الذي يولده كل محور من المحورين يحقق معادلة لابلاس و في نفس الوقت يحقق الشروط الحدية و استناداً إلى نظرية الحل الوحيد يعتبر هذا الحل الذي حصلنا عليه هو حل حقيقي .

2 حقل محور مشحون موجود بالقرب من حد فاصل مستوي بين عازلين ذات ثوابت عازلية



من الشكل لدينا **I** نصف الفراغ العلوي مملوء بعازل $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ و النصف السفلي **II** مملوء بعازل ε_2 و لدينا $\boldsymbol{ab}$ الحد الفاصل بين الوسطين العازلين.
في نصف الفراغ العلوي بشكل موازٍ للحد الفاصل بين الوسطين يوجد محور مشحون ذو شحنة τ_1 .
بسبب استقطاب العازلين يظهر على الحد الفاصل شحنات مرتبطة سوف تؤثر على الحقل في كلا الوسطين .
يؤخذ تأثير الشحنات المرتبطة على الحقل بعين الاعتبار بواسطة إدخال شحنات إضافية وهمية τ_3, τ_2 .. (ولدينا شرطان جديدان) يجب تحقيق الشرطان جديدان ولذلك نحتاج مساعدة شحنتان مستقلتان τ_3, τ_2 ..

يتم حساب الحقل في أي نقطة من نقاط نصف الفراغ العلوي (نصف المستوي) بسبب الشحنتين الحقيقية τ_1 والوهمية τ_2 مع العلم أنه في هذه الحالة نصف الفراغ العلوي والسفلي مملوءان بعازل واحد ε .

ويحدد الحقل في نصف الفراغ السفلي كحقل متولد عن الشحنة الإضافية τ_3 الموجودة في نفس النقطة التي وجِـــدَ بها τ_1 .

وكذلك نفس الحالة ، النصف العلوي والسفلي مملوءان بعازل ε_2 ولتحديد قيم الشحنات المجهولة نعتمد على الشرطين الحديين وبالتالي نتمكن من تحديد قيم هذه الشحنات .

من الشرط الحدي الأول :

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

$$E_\tau^I + E_\tau^{II} = E_\tau^{III}$$

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon_1 r}(\tau_1 + \tau_2)\cos\alpha = \frac{1}{2\pi\varepsilon_2 r}\tau_3\cos\alpha$$

$$\boldsymbol{\tau_1 + \tau_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\tau_3} \quad \ldots \boxed{1}$$

ومن الشرط الحدي الثاني :

$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$D_n^I - D_n^{II} = D_n^{III}$$

$$\frac{1}{2\pi r}(\tau_1 - \tau_2)\sin\alpha = \frac{1}{2\pi r}\tau_3\sin\alpha$$

$$\boldsymbol{\tau_1 - \tau_2 = \tau_3} \quad \ldots \boxed{2}$$

بحل المعادلات 2 و 1 نحصل على :

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$3 \ldots \begin{cases} \tau_2 = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}\tau_1 \\ \tau_2 = \dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\tau_1 \end{cases}$$

ملاحظة : لو تولد الحقل عن شحنة نقطية بدلاً من المحور المشحون فإن الطريقة تبقى نفسها بالنسبة للشحنات النقطية والمعادلات الثلاثة تبقى صالحة للشحنات النقطية أيضاً (أي بدل τ نضع q) .

ملاحظة :

إشـــارة τ_3 من نفس إشارة τ_1 , τ_3 و تعاكس τ_1

$|+\tau| = |-\tau|$ ⟵ تعوض بشحنة وهمية إضافية ⟵ شحنة مرتبطة ⟵ استقطاب

انتهت المحاضرة . . .

إذا كنت ستخطط لأمر في جميع الأحوال . .
فلماذا لاتـخـطـط لأمر عظيم ..

دونالد ترمب
رجل أعمال أمريكي